ශ්‍රේණි

අනුක්‍රම :-
කිසියම් රටාවකට අනුව ඇති පද සමූහයක්.
උදා:- 1, 2, 3, 4, 5, ...

ශ්‍රේණි :-
කිසියම් රටාවකට අනුව ඇති පද සමූහයක් (+) හෝ (−) වලින් සම්බන්ධ කළ විට.

උදා:- $1+2+3+4+5+\dots$

$\cos^2 x - \cos^3 x + \cos^4 x - \cos^5 x + \dots$

** පරිමිත ශ්‍රේණි :- පද ගණන් කළ හැකි මෙන්ම සීමා සහිත.

අපරිමිත ශ්‍රේණි :- පද ගණන් කළ නොහැක.

ශ්‍රේණි
- ① මූලික ශ්‍රේණි
- ② මූලික නොවන ශ්‍රේණි.

01 මූලික ශ්‍රේණි.
- ① සමාන්තර ශ්‍රේණි
- ② ගුණෝත්තර ශ්‍රේණි
- ③ සමාන්තර ගුණෝත්තර ශ්‍රේණි

01 සමාන්තර ශ්‍රේණි:
අනුයාත පද දෙකක් අතර අන්තරය සමාන ශ්‍රේණි.
උදා:- $2+5+8+11+\dots$

සාධාරණ පදය.

මුල් පදය = a, පොදු අන්තරය = d

$a + (a+d) + (a+2d) + (a+3d) + \dots$

1 පදය, 2 පදය, 3 පදය, 4 පදය

සමාන්තර ශ්‍රේණි

සාධාරණ පදය = r වන පදය = U_r නම්,

$$U_r = a+(r-1)d$$

a = මුල් පදය
d = පොදු අන්තරය.

පද n හි ඓක්‍යය (S_n)

සමාන්තර ශ්‍රේණි:

$$S_n = \frac{n}{2}\left[2a+(n-1)d\right]$$

n = මුළු පද ගණන.
a = මුල් පදය
d = පොදු අන්තරය
S_n = පද වල ඓක්‍යය

සාධනය { S_n මුල-අග, අග-මුල ලියා, පද එකතු කර ලියා එකතු කරමින }

$S_n = a+(a+d)+(a+2d)+\dots+[a+(n-2)d] + [a+(n-1)d]$ — ①

$S_n = [a+(n-1)d]+[a+(n-2)d]+\dots + (a+2d)+(a+d)+a$ — ②

①+②

$2S_n = [2a+(n-1)d]+[2a+(n-1)d] + \dots + [2a+(n-1)d]$

$2S_n = n[2a+(n-1)d]$

$S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$

සමාන්තර ශ්‍රේණි S_n
සාධනය පියවර :-
① S_n මුල සිට අග වලට ලියන්න
$a \rightarrow [a+(n-1)d]$
② S_n අග සිට මුලට ලියන්න
$[a+(n-1)d] \rightarrow a$
③ ①+② කරන්න.
හැම පදයක්ම
$(2a+(n-1)d)$ වේ
④ $S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$
ලියන්න

S_n හි තවත් ආකාරය

$$S_n = \frac{n}{2}\left[a + \underbrace{a+(n-1)d}_{=l}\right]$$

සමාන්තර ශ්‍රේණි

$$S_n = \frac{n}{2}(a+l)$$

$l = a+(n-1)d$

02 ගුණෝත්තර ශ්‍රේණි .

අනුයාත පද දෙකක් අතර අනුපාතය සමාන ශ්‍රේණියක්

උදා: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+ \dots$

සාධාරණ පදය

මුල් පදය $= a$, පොදු අනුපාතය $= x$

$a + ax + ax^2 + ax^3 + \dots$

1 පදය 2 පදය 3 පදය 4 පදය

ගුණෝත්තර ශ්‍රේණි .

$$U_r = a(x)^{(r-1)}$$

$a =$ මුල් පදය

$x =$ පොදු අනුපාතය

පද n වල ඓක්‍යය (S_n)

ගුණෝත්තර ශ්‍රේණි

$$S_n = \frac{a(1-x^n)}{(1-x)}$$

$n =$ මුළු පද ගණන

$x =$ පොදු අනුපාතය

ගුණෝත්තර ශ්‍රේණි .

සාධනය පියවර

① S_n ලියන්න මුල් සිට අගට $a \rightarrow ax^{(n-1)}$

② ① $\times x$ කර ලියන්න

③ ① − ② කරන්න

④ $S_n = \frac{a(1-x^n)}{(1-x)}$ ලියන්න

$S_n = a + ax + ax^2 + ax^3 + \dots + ax^{(n-2)} + ax^{(n-1)}$ —①

① $\times x$

$xS_n = ax + ax^2 + \dots + ax^{(n-1)} + ax^{(n)}$ —②

① − ②

$(1-x)S_n = (1-x)a + (x-x)ax + \dots + (ax^{n-1} - ax^n)$

$(1-x)S_n = a - ax^n$

$S_n = a\frac{(1-x^n)}{(1-x)}$ //

03 සමාන්තර - ගුණෝත්තර ශ්‍රේණි .

ශ්‍රේණියක,

එක් පදයක් r පද දෙකක ගුණිතයක් ලෙස දිය හැක.

එක් පදයක් r සමාන්තර ශ්‍රේණියක ආකාරයට ගමන් කරයි

එක් පදයක් r ගුණෝත්තර ශ්‍රේණියක ආකාරයට ගමන් කරයි

උදා: ① $2 \cdot 3 + 4 \cdot 12 + 6 \cdot 48 + \dots$

$\times 4$ $\times 4$

$+2$ $+2$

02 ශ්‍රේණි ගොනුකිරීම

සාධාරණ r වන පදය සාධාරණ
පදයක් ලෙස U_r
සොයා ගන්නා
ආකාරය බලමු

සාධාරණ පදය ලිවීම

① $1.2.3 + 2.5.7 + 3.8.11 + \dots$ ($+1$, $+3$, $+4$)

$U_r = [1+(r-1)1].[2+(r-1)3].(3+(r-1)4)$

$U_r = [r][3r-1](4r-1)$

② $\frac{1^2}{2^5} + \frac{3^2}{5^5} + \frac{5^2}{8^5} + \dots$

$U_r = \frac{(1+(r-1)2)^2}{(2+(r-1)3)^5}$

$U_r = \frac{(2r-1)^2}{(3r-1)^5}$

③ $\log\frac{1^3}{3^5} + \log\frac{4^3}{5^5} + \log\frac{7^3}{7^5} + \dots$

$U_r = \log\frac{(1+(r-1)3)^3}{(3+(r-1)2)^5}$

$U_r = \log\frac{(3r-2)^3}{(2r+1)^5}$

④ $\frac{1}{2.3}\,\frac{1}{7} + \frac{2}{3.4}\,\frac{1}{7^2} + \frac{3}{4.5}\cdot\frac{1}{7^3} + \dots$

$U_r = \frac{1}{[2+(r-1)1]\,[3+(r-1)1]} \cdot \frac{1}{7^r}$

$= \frac{1}{(r+1)(r+2)} \cdot \frac{1}{7^r}$

වැදගත්!

① පළමු + නිඛිල n වල එකතුව

$$\boxed{1+2+3+\dots+n = \frac{n}{2}(n+1)}$$

② පළමු + නිඛිල වර්ගවල n වල එකතුව

$$\boxed{1^2+2^2+3^2+\dots+n^2 = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1)}$$

③ පළමු + නිඛිල ඝනයන්ගේ n වල එකතුව

$$\boxed{1^3+2^3+3^3+\dots+n^3 = \left[\frac{n}{2}(n+1)\right]^2}$$

ශ්‍රේණි ගොනු කිරීමේදී සාධාරණ පදය
U_r ලියා එම U_r අනුව ගොනුකිරීම
ක්‍රම ගණනාවක් භාවිත කෙරේ

ශ්‍රේණි ගොනු කිරීම

- ① U_r ; r වල බහුපද ශ්‍රිතයක් නම්
- ② U_r ; r වල පරිමේය ශ්‍රිතයක් නම්
- ③ U_r ; ත්‍රිකෝණමිතික වූ ශ්‍රිතයක් නම්
- ④ ලඝුගණක අඩංගු නම්
- ⑤ ඝාතීය අඩංගු නම්
- ⑥ වෙනත්

① U_r ; r වල බහුපද නම්

U_r ; r වල බහුපද නම්

- ① Σ සූත්‍ර භාවිතය
- ② අන්තර සූත්‍ර භාවිතය

① Σ සූත්‍ර භාවිතය

$\sum_{r=1}^{n} r = \frac{n}{2}(n+1)$
$\sum_{r=1}^{n} r^2 = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$
$\sum_{r=1}^{n} r^3 = \left[\frac{n}{2}(n+1)\right]^2$

පියවර

① සාධාරණ පදය U_r ලියන්න

② දෙපසට Σ වලින් ගුණ කරන්න

Σ සඳහා සූත්‍ර භාවිත කරන්න

මාත්‍රය

බෙදීම ~~[illegible]~~

③ ඉන්පසු ප්‍රකාශන ගොනු කරන්න r, r^2, r^3

** Σ සම්බන්ධ ගැටලුවල සාධාරණ පදයේ මාත්‍රය 3 ක් හෝ ඊට වඩා අඩු විය යුතුය.

① $1^2+4^2+7^2+10^2+\dots$

පළමු පදය සහ පොදු අන්තරය ~~[illegible]~~.

$$U_r = [\cancel{1}+(r-1)3]^2$$

$$U_r = [3r-2]^2$$

දෙපසට Σ ගැනීම

$$\sum_{r=1}^{n} U_r = \sum_{r=1}^{n} [3r-2]^2$$

$$\sum_{r=1}^{n} U_r = \sum_{r=1}^{n} [9r^2-12r+4]$$

$$\sum_{r=1}^{n} U_r = 9\underbrace{\sum_{r=1}^{n} r^2}-12\underbrace{\sum_{r=1}^{n} r}+\underbrace{4\sum_{r=1}^{n} 1}_{=4n}$$

$$\sum_{r=1}^{n} U_r = 9\frac{n}{6}(n+1)(2n+1)-12\frac{n}{2}(n+1)+4n$$

② $1^2+(1^2+2^2)+(1^2+2^2+3^2)+(1^2+2^2+3^2+4^2)+\dots$

සාධාරණ පදයේ රටාව (ශ්‍රේණියේ රටාව)

$$U_r = [1^2+2^2+\dots+r^2]$$

$$U_r = \sum_{r=1}^{r} r^2$$

$$U_r = \frac{r}{6}(r+1)(2r+1)$$

දෙපසට Σ ගැනීම

$$\sum_{r=1}^{n} U_r = \sum_{r=1}^{n} \frac{r}{6}(r+1)(2r+1)$$

$$\sum_{r=1}^{n} U_r = \sum_{r=1}^{n}\left[\frac{r}{6}(2r^2+3r+1)\right]$$

$$= \frac{1}{6}\sum_{r=1}^{n}[2r^3+3r^2+r]$$

$$= \frac{1}{6}\left[2\sum_{r=1}^{n} r^3+3\sum_{r=1}^{n} r^2+\sum_{r=1}^{n} r\right]$$

$$= \frac{1}{6}\left[2\left[\frac{n}{2}(n+1)\right]^2+3\frac{n}{6}(n+1)(2n+1)+\frac{n}{2}(n+1)\right]$$

③ $1+(1+2)+(1+2+3)+(1+2+3+4)+\dots$

$$U_r = (1+2+\dots+r)$$

$$U_r = \sum_{r=1}^{r} r$$

$$U_r = \frac{r}{2}(r+1)$$

දෙපසටම Σ ගැනීම

$$\sum_{r=1}^{n} U_r = \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n}[r^2+r]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sum_{r=1}^{n} r^2+\sum_{r=1}^{n} r\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{n}{6}(n+1)(2n+1)+\frac{n}{2}(n+1)\right]$$

Note: Σ සඳහා සූත්‍ර භාවිතය

Σ, ගුණනය, බෙදීම ප්‍රකාශනවලට වලංගු නොවේ. එකතු කිරීම අඩු කිරීම් වලට පමණි.

A නියතයක් නම්

$$\sum_{i=1}^{n} A f(x)_i = A\sum_{i=1}^{n} f(x)_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} A = nA$$

[illegible]

① (II) අන්තර් ක්‍රමය

(මෙම ක්‍රමය යොදාගනුයේ U_r හි පද සංඛ්‍යාත්මක ශ්‍රේණියක ආකාරයෙන් පවතින විටය.)

පියවර

① U_r අනුයාත පද දෙකක අන්තරයක් ලෙස ලිවිය හැකි වීම.

$$U_r = f(r) - f(r+1)$$
$$U_r = f(r) - f(r-1)$$
$$U_r = f(r+1) - f(r+2)$$
$$U_r = f(r) - f(r+2)$$
$$U_r = f(r+2) - f(r)$$

② r වෙනුවට $r=1, 2, 3, n-3, n-1, n$ ආදේශ කර පද එකතු කිරීම

උදා: $U_r = f(r+1) - f(r)$ නම්,

$$r=1;\ U_1 = \cancel{f(2)} - f(1)$$
$$r=2;\ U_2 = \cancel{f(3)} - \cancel{f(2)}$$
$$r=3;\ U_3 = f(4) - \cancel{f(3)}$$
$$\vdots$$
$$r=n-2;\ U_{n-2} = \cancel{f(n-1)} - \cancel{f(n-2)}$$
$$r=n-1;\ U_{n-1} = f(n) - \cancel{f(n-1)}$$
$$r=n;\ U_n = f(n+1) - \cancel{f(n)}$$

(+)

$$\sum_{r=1}^{n} U_r = f(n+1) - f(1)$$

වේ.

② ② $f(r)$ ලිවීම

$$\boxed{f(r) = \left[\begin{matrix}U_r \text{ හි දකුණු}\\ \text{අන්ත සාධක}\end{matrix}\right]\left[\begin{matrix}U_r \text{ හි ඊළඟ}\\ \text{සාධකය}\end{matrix}\right] A}$$

නියතය

A සෙවීම (U_r වල r හි සංගුණකය අනුව යොදාගෙන)

① U_r හි සාධකවල r හි සංගුණකය $\neq 1$, $f(r) - f(r-1) = U_r$ ආකාරයට ගන්නවා

② U_r හි සාධකවල r හි සංගුණකය $=a$ නම්,

$$f(r) - f(r-\square) = U_r$$

U_r හි සාධකවල පොදු අන්තරය

③ ඒ අනුව $f(r)$ සොයා ගැනීම අවශ්‍යයි

උදා: ① $1.2.3.4 + 2.3.4.5 + 3.4.5.6 + \cdots$ පළමු පද n හි එකතුව

$$U_r = r(r+1)(r+2)(r+3)$$

$$\underline{f(r)} = r(r+1)(r+2)(r+3)\underline{(r+4)}A$$

r හි සංගුණකය $=1$

$$f(r) - f(r-1) = U_r$$

$$\cancel{r(r+1)(r+2)(r+3)}(r+4)A - (r-1)\cancel{(r)(r+1)(r+2)(r+3)}A = \cancel{r(r+1)(r+2)(r+3)}$$

$$(r+4)A - (r-1)A = 1$$

$$\cancel{Ar} + 4A - \cancel{rA} + A = 1$$

$$A = 1/5$$

$$f(r) = r(r+1)(r+2)(r+3)(r+4)\frac{1}{5}$$

[illegible]

$$U_r = f(r) - f(r-1)$$

$r=1;\ u_1 = \cancel{f(1)} - f(0)$
$r=2;\ u_2 = \cancel{f(2)} - \cancel{f(1)}$
$r=3;\ u_3 = f(3) - \cancel{f(2)}$
$\vdots$
$r=n-2;\ u_{n-2} = \cancel{f(n-2)} - f(n-1)$
$r=n-1;\ u_{n-1} = \cancel{f(n-1)} - \cancel{f(n-2)}$
$r=n;\ u_n = f(n) - \cancel{f(n-1)}$

$$\sum_{r=1}^{n} u_r = f(n) - f(0)$$

$$\sum_{r=1}^{n} u_r = n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)\frac{1}{5} - 0$$

$$\sum_{r=1}^{n} u_r = \frac{n}{5}(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$$

② $1.3.5 + 2.4.6 + 3.5.7 + \dots$

[illegible]

$$U_r = r(r+2)(r+4)$$

$f(r) = r(r+2)(r+4)(r+6)A$ [illegible]

$$f(r) - f(r-\boxed{2}) = u_r$$

$$(r+6)A - (r-2)A = 1$$

$$8A = 1$$

$$A = 1/8$$

$$\therefore f(r) = r(r+2)(r+4)(r+6)\frac{1}{8}$$

$$U_r = f(r) - f(r-2)$$

$r=1;\ u_1 = f(1) - f(-1)$
$r=2;\ u_2 = f(2) - f(0)$
$r=3;\ u_3 = f(3) - f(1)$
$\vdots$
$r=n-2;\ u_{n-2} = f(n-2) - f(n-4)$
$r=n-1;\ u_{n-1} = f(n-1) - f(n-3)$
$r=n;\ u_n = f(n) - f(n-2)$

$$\sum_{r=1}^{n} u_r = f(n) + f(n-1) - f(-1) - f(0)$$

$$\sum_{r=1}^{n} u_r$$

$$= f(n) + f(n-1) - f(-1) - f(0)$$

$$= n(n+2)(n+4)(n+6)\frac{1}{8} + (n-1)(n+1)(n+3)(n+5)\frac{1}{8} - (-1)(1)(3)(5)\frac{1}{8} - 0$$

$$\therefore \sum_{r=1}^{n} u_r = \frac{15}{8} + \frac{n}{8}(n+2)(n+4)(n+6) + \frac{(n-1)}{8}(n+1)(n+3)(n+5)$$

② U_r ; r වල පරිමේය ශ්‍රිත ශ්‍රේණි

U_r ; r වල පරිමේය ශ්‍රිත ශ්‍රේණි
- ① අන්තර සමීකරණය
- ② ආංශික භාග සමීකරණය
- ③ විශේෂ ක්‍රම

② Ⅰ අන්තර සමීකරණය

පියවර - ① U_r සාධක වලට අනුගත වන ලෙස අනුගත ශ්‍රිතයක් ලියා ගන්න.

② r ට අගයන් ආදේශ කිරීමෙන් පසු පද එකතු කරන්න.

f(r) ලිවීම , 1 ක්‍රමය

* යෙදිය හැකි අවස්ථා
  - ① ලවයට නියතයක් තිබිය යුතුය
  - ② හරයේ සාධක සමාන්තර ශ්‍රේණියක ආකාරයට තිබිය යුතුය

* සම්මතය

$$f(r) = \frac{A}{\begin{bmatrix} U_r \text{ වල හරයේ මුල් සාධකය} \\ \text{හැර ඉතිරි සාධක} \end{bmatrix}}$$

* f(r) වල ලකුණ තෝරීම
  - ① U_r වල හරයේ සාධකවල r වල සංගුණකය $\neq 1$ නම් ; $f(r) - f(r-1) = U_r$ වන පරිදි තෝරා ගනු
  - ② U_r වල හරයේ සාධකවල r වල සංගුණකය $= 1$ නම් ; $f(r) - f(r-\square) = U_r$ වන පරිදි තෝරා ගනු.

U_r වල හරයේ සාධකවල පොදු අන්තරය

f(r) ලිවීම , 2 ක්‍රමය

* යෙදිය හැකි අවස්ථා
  - ① U_r වල හරයේ සාධක සමාන්තර ශ්‍රේණියක ආකාරයට තිබිය යුතුය
  - ② ලවයට නියතයක් හෝ ඒකජයක් පැවතිය හැක r වල ශ්‍රිත

* සම්මතය

$$f(r) = \frac{\begin{bmatrix} \text{උපරිම හරයේ මාත්‍රාවට 1ක් අඩු} \\ \text{මාත්‍රාවක සාධාරණ ශ්‍රිතයක්} \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} U_r \text{ වල හරයේ මුල් සාධකය} \\ \text{හැර ඉතිරි සාධක} \end{bmatrix}}$$

* f(r) වල ලකුණ / ශ්‍රිත තෝරීම.
  - ① U_r වල හරයේ සාධකවල r වල සංගුණකය $\neq 1$ නම් ; $f(r) - f(r-1) = U_r$ වන පරිදි තෝරා ගනු
  - ② U_r වල හරයේ සාධකවල r වල සංගුණකය $= 1$ නම් ; $f(r) - f(r-\square) = U_r$ වන පරිදි තෝරා ගනු.

U_r වල හරයේ සාධකවල පොදු අන්තරය

සමහර ගැටලු වලදී f(r) ලබා දී ඇත

Note: $4u_1 + 4u_2 + \dots + 4u_n = 4\sum_{r=1}^{n} u_r$

+ U_r සෙවීම ඇත
+ පසුව f(r) , f(r+1) etc. හා U_r අතර සම්බන්ධයක් ඔප්පු කිරීම ඇත. එය තාවක පවත්නා අගයන් ආදේශ කර ලබා ගන්න.

* ඉන්පසු r ට අගයන් ආදේශ කර සියල්ල එකතු කර n වල ශ්‍රිතය ගන්න.

f(r) වලදී ක්‍රමය

② $\frac{1}{1.2.3.4} + \frac{1}{2.3.4.5} + \frac{1}{3.4.5.6} + \ldots$

වලදී වූ නවල පොසාව

$$u_r = \frac{1}{(r)(r+1)(r+2)(r+3)}$$

$$f(r) = \frac{A}{(r+1)(r+2)(r+3)}$$ පොසා ගන්න.

$$f(r) - f(r - \boxed{1}) = u_r$$

$$\frac{A}{(r+1)(r+2)(r+3)} - \frac{A}{(r)(r+1)(r+2)} = \frac{1}{(r)(r+1)(r+2)(r+3)}$$

$$\frac{A}{(r+3)} - \frac{A}{r} = \frac{1}{r(r+3)}$$

$\times r(r+3)$

$$\cancel{Ar} - \cancel{Ar} - 3A = 1$$

$$A = -\tfrac{1}{3}$$

$$f(r) = \frac{-\tfrac{1}{3}}{(r+1)(r+2)(r+3)}$$

$$u_r = f(r) - f(r-1)$$

$r=1;\ u_1 = \cancel{f(1)} - f(0)$

$r=2;\ u_2 = \cancel{f(2)} - \cancel{f(1)}$

$r=3;\ u_3 = f(3) - \cancel{f(2)}$

$\vdots$

$r=n-2;\ u_{n-2} = \cancel{f(n-2)} - \cancel{f(n-3)}$

$r=n-1;\ u_{n-1} = \cancel{f(n-1)} - \cancel{f(n-2)}$

$r=n;\ u_n = f(n) - \cancel{f(n-1)}$ ⊕

$$\sum_{r=1}^{n} u_r = -f(0) + f(n)$$

$$= \frac{-\tfrac{1}{3}}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \frac{\tfrac{1}{3}}{1.2.3}$$

$$\sum_{r=1}^{n} u_r = \frac{-\tfrac{1}{3}}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \frac{1}{18}$$ //

f(r) ගුණන ක්‍රමය

③ $\frac{4}{1.3.5} + \frac{7}{3.5.7} + \frac{10}{5.7.9} + \ldots$

වලදී වූ නවල පොසාව r

$$u_r = \frac{(3r+1)}{(2r-1)(2r+1)(2r+3)}$$

$$f(r) = \frac{(Ar+B)}{(2r+1)(2r+3)}$$ $r^2 - r^1, r$

$$f(r) - f(r-1) = u_r$$

$$\frac{(Ar+B)}{\cancel{(2r+1)}(2r+3)} - \frac{(A(r-1)+B)}{(2r-1)\cancel{(2r+1)}} = \frac{(3r+1)}{(2r-1)\cancel{(2r+1)}(2r+3)}$$

$\times (2r+3)(2r-1)$

පොදු පද සලකා බැලීමෙන්,

$$(Ar+B)(2r-1) - [A(r-1)+B](2r+3) = (3r+1)$$

$r^1 \to 3 = -A + 2B \quad -3A + 2B$

$r^0 \to 1 = -B \quad -3B$

$1 = -4B$

$B = -\tfrac{1}{4}$

$A = -\tfrac{3}{2} \qquad B = -\tfrac{11}{8}$

$$f(r) = \frac{-\tfrac{3}{2}r - \tfrac{11}{8}}{(2r+1)(2r+3)}$$

$$u_r = f(r) - f(r-1)$$

$r=1;\ u_1 = \cancel{f(1)} - f(0)$

$r=2;\ u_2 = \cancel{f(2)} - \cancel{f(1)}$

$r=n-1;\ u_{n-1} = \cancel{f(n-1)} - \cancel{f(n-2)}$

$r=n;\ u_n = f(n) - \cancel{f(n-1)}$ ⊕

$$\sum_{r=1}^{n} u_r = f(n) - f(0)$$

$$= \frac{-(12n+11)}{8(2n+1)(2n+3)} + \frac{\tfrac{11}{8}}{1.3}$$ //

පොදුපදය f(r) දුන්නම

(4) $r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $u_r = \dfrac{10r+9}{(2r-3)(2r-1)(2r+1)}$

හා $f(r) = r(Ar+B)$ යැයි ගනිමු.

මෙහි A හා B තාත්වික නියත වේ

$r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $u_r = \dfrac{f(r)}{(2r-3)(2r-1)} - \dfrac{f(r+1)}{(2r-1)(2r+1)}$ වන පරිදි A හා B සොයන්න

ද සොයන්න. $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $\sum_{r=1}^{n} u_r = -3 - \dfrac{(n+1)(2n+3)}{(4n^2-1)}$ බව පෙන්වන්න

$\sum_{r=1}^{\infty} u_r$ අපරිමිත ශ්‍රේණිය අභිසාරී නොවන බව කාරණා සහිතව පෙන්වන්න

$$\frac{10r+9}{(2r-3)\cancel{(2r-1)}(2r+1)} = \frac{r(Ar+B)}{(2r-3)\cancel{(2r-1)}} - \frac{(r+1)(Ar+A+B)}{\cancel{(2r-1)}(2r+1)}$$

$$(10r+9) = r(Ar+B)(2r+1) - (r+1)(Ar+A+B)(2r-3)$$

සංගුණක සමකරමින්

$r \to 10 = 2B + 4A$ — ①

$r^2 \to 0 = 0$

ග $\to 9 = 3A+3B$ — ②

$A = 2,\ B = +1$

$f(r) = r(2r+1)$

$$u_r = \underbrace{\frac{f(r)}{(2r-3)(2r-1)}}_{g(r)} - \underbrace{\frac{f(r+1)}{(2r-1)(2r+1)}}_{g(r+1)}$$

$$g(r) = \frac{f(r)}{(2r-3)(2r-1)}$$

$u_r = g(r) - g(r+1)$

$r=1;\ u_1 = g(1) - \cancel{g(2)}$

$r=2;\ u_2 = \cancel{g(2)} - \cancel{g(3)}$

$r=3;\ u_3 = \cancel{g(3)} - \cancel{g(4)}$

$\vdots$

$r=n-2;\ u_{n-2} = \cancel{g(n-2)} - \cancel{g(n-1)}$

$r=n-1;\ u_{n-1} = \cancel{g(n-1)} - \cancel{g(n)}$

$r=n;\ u_n = \cancel{g(n)} - g(n+1)$ (+)

$$\sum_{r=1}^{n} u_r = g(1) - g(n+1)$$

$$= \frac{f(1)}{(-1)(1)} - \frac{f(n+1)}{(2n-1)(2n+1)}$$

$$\sum_{r=1}^{n} u_r = -1.(3) - \frac{(n+1)(2n+3)}{(2n-1)(2n+1)}$$

$$\sum_{r=1}^{n} u_r = -3 - \frac{(n+1)(2n+3)}{(4n^2-1)}$$

② (II) භින්න භාග සිද්ධාන්තය

* හැඳින්වීම;

පදයේ සාධක වෙන් කළ හැකි
එවැනි ශ්‍රේණියක් එකතුව සොයයි
භාවිත කෙරේ
(ශ්‍රේණියේ පද අතර පොදු අන්තරයක් නොමැතිනම්)

* පියවර:

① U_r සොයන්න
② U_r වල පදයේ සාධක වෙන්කර
භින්න භාගවලට කඩන්න
② එම භින්න භාග තොරවා
$f(r), f(r+1)$, etc
සම්බන්ධයක්වලට
U_r අන්තර සිද්ධාන්තය
ආකාරයට ගනිමින්
ඊට අදාළ අගයන්
ලබා ගන්න.
③ සම්මතයෙන් ආදේශ කර
එකතුවෙන් S_n ලබාගන්න

උදා
①
$$\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5}$$ ශ්‍රේණියේ n පදවල එකතුව

$$u_r = \frac{1}{(r)(r+1)(r+2)}$$

$$u_r = \frac{1/2}{r} + \frac{1/-1.1}{(r+1)} + \frac{1/-2.-1}{(r+2)}$$

$r=0$ $\quad$ $r=-1$ $\quad$ $r=-2$

$$u_r = \frac{1}{2r} - \frac{1}{(r+1)} + \frac{1}{2(r+2)}$$

f(r) වල හැඩය ගත නොහැකිනම් r0 අගයන් ආදේශ කරමින්

$r=1;\ u_1 = \frac12 - \frac12 + \frac16$

$r=2;\ u_2 = \frac14 - \frac13 + \frac18$

$r=3;\ u_3 = \frac16 - \frac14 + \frac{1}{10}$

$\vdots$

$r=n-2;\ u_{n-2} = \frac{1}{2(n-2)} - \frac{1}{(n-1)} + \frac{1}{2(n)}$

$r=n-1;\ u_{n-1} = \frac{1}{2(n-1)} - \frac{1}{(n)} + \frac{1}{2(n+1)}$

$r=n;\ u_n = \frac{1}{2n} - \frac{1}{(n+1)} + \frac{1}{2(n+2)}$

$$\sum_{r=1}^{n} u_r = \frac12 - \frac12 + \frac14 + \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{(n+1)} + \frac{1}{2(n+2)}$$

$$\sum_{r=1}^{n} u_r = \frac14 - \frac{1}{(n+1)} + \frac{1}{2(n+2)}$$

2. උදා ②
$$\frac{3}{1.2}\left(\frac12\right) + \frac{4}{2.3}\left(\frac12\right)^2 + \frac{5}{3.4}\left(\frac12\right)^3 + \dots$$

ශ්‍රේණියේ r වැනි පදය වන U_r ලියා දක්වන්න
$U_r = f(r-1) - f(r)$ ආකාරයෙන් $f(r)$ සොයන්න
එනයින් $S_n = \sum_{r=1}^{n} u_r$ සොයන්න
$\lim_{n\to\infty} S_n$ සොයන්න

$$u_r = \frac{(r+2)}{(r)(r+1)}\left(\frac12\right)^r$$

$$u_r = \left(\frac12\right)^r\left[\frac{2/1}{r} + \frac{1/-1}{(r+1)}\right]$$

$$u_r = \left[\frac{2^{(1-r)}}{r} - \frac{2^{-r}}{(r+1)}\right]$$

$$u_r = \underbrace{\frac{1}{r2^{r-1}}}_{f(r-1)} - \underbrace{\frac{1}{(r+1)2^r}}_{f(r)}$$

$u_r = f(r-1) - f(r)$ ආකාරයේ

$r=1;\ u_1 = f(0) - f(1)$

$r=2;\ u_2 = f(1) - f(2)$

$r=3;\ u_3 = f(2) - f(3)$

$\vdots$

$r=n-1;\ u_{n-1} = f(n-2) - f(n-1)$

$r=n;\ u_n = f(n-1) - f(n)$

$$\sum_{r=1}^{n} u_r = f(0) - f(n)$$

$$= \frac{1}{1.2^0} - \frac{1}{(n+1)2^n}$$

$$S_n = \sum_{r=1}^{n} u_r = 1 - \frac{1}{(n+1)2^n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[1 - \frac{1}{(n+1)2^n}\right]$$

$$1 - \frac{1}{\infty}$$

$$1 - 0$$

$$1$$

සංයුක්ත ගණිතය

2019 AL

① $r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $U_r = \dfrac{1}{r(r+1)(r+3)(r+4)}$ හා $V_r = \dfrac{1}{r(r+1)(r+2)}$ ලෙස ගනිමු.

$r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $V_r - V_{r+2} = 6U_r$ බව පෙන්වන්න.

එනයින් ; $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $\sum\limits_{r=1}^{n} U_r = \dfrac{5}{144} - \dfrac{(2n+5)}{6(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}$ බව පෙන්වන්න.

$r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $W_r = U_{2r-1} + U_{2r}$ ලෙස ගනිමු.

$n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $\sum\limits_{r=1}^{n} W_r = \dfrac{5}{144} - \dfrac{(4n+5)}{24(n+1)(n+2)(2n+1)(2n+3)}$ බව අපෝහනය කරන්න. ~~එනයින්~~ $\sum\limits_{r=1}^{\infty} W_r$ අභිසාරී ශ්‍රේණියක් බව පෙන්වා එහි ඓක්‍යය සොයන්න.

LHS

$$V_r - V_{r+2} = \frac{1}{r(r+1)(r+2)} - \frac{1}{(r+2)(r+3)(r+4)}$$

$$= \frac{(r+3)(r+4) - r(r+1)}{r(r+1)(r+2)(r+3)(r+4)}$$

$$= 6 \cdot \frac{1}{r(r+1)(r+3)(r+4)} = 6U_r$$

$$6U_r = V_r - V_{r+2}$$

$r=1;\ 6U_1 = V_1 - \cancel{V_3}$

$r=2;\ 6U_2 = V_2 - \cancel{V_4}$

$r=3;\ 6U_3 = \cancel{V_3} - V_5$

$r=n-2;\ 6U_{n-2} = \cancel{V_{n-2}} - V_n$

$r=n-1;\ 6U_{n-1} = \cancel{V_{n-1}} - V_{n+1}$

$r=n;\ 6U_n = \cancel{V_n} - V_{n+2}$

$$6\sum_{r=1}^{n} U_r = V_1 + V_2 - V_{n+1} - V_{n+2}$$

$$6\sum_{r=1}^{n} U_r = \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} - \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} - \frac{1}{(n+2)(n+3)(n+4)}$$

~~$\sum\limits_{r=1}^{n} U_r = \dfrac{5}{144} - \dfrac{1}{4(n+2)^2} - \dfrac{1}{4(n+3)^2}$~~

$$\sum_{r=1}^{n} U_r = \frac{5}{144} - \frac{(2n+5)}{6(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}$$

— ①

$$W_r = U_{2r-1} + U_{2r}$$

r ට ධන නිඛිල අගයන් ආදේශයෙන්

$r=1;\ W_1 = U_1 + U_2$

$r=2;\ W_2 = U_3 + U_4$

$r=3;\ W_3 = U_5 + U_6$

$r=n;\ W_n = U_{(2n-1)} + U_{2n}$

$$\sum_{r=1}^{n} W_r = \underbrace{U_1 + U_2 + \dots + U_{2n}}$$

$$\sum_{r=1}^{n} W_r = \sum_{r=1}^{2n} U_r$$

① හි $n \to 2n$ ආදේශ

$$\sum_{r=1}^{n} W_r = \frac{5}{144} - \frac{(4n+5)}{6(2n+1)(2n+2)(2n+3)(2n+4)}$$

$$\sum_{r=1}^{n} W_r = \frac{5}{144} - \frac{(4n+5)}{24(2n+1)(2n+3)(n+1)(n+2)}$$

② (III) විභේදන ක්‍රමය

පියවර

පදයේ සාධක සමාන්තර ශ්‍රේඪියක පිහිටිය යුතුය

එසේ නොවන්නේ කිව යුතුය.

පසුව u_r ලියන්න.

$$u_r = \frac{1}{(r)(r+1)(r+2)(r+3)}$$

නම්

මෙලෙස පද මාරු කර ගොනුවන්න. අවශ්‍ය නම් පද සාධකවල පළමු හා අවසාන ලෙස ලබාගත යුතුය වෙනස් කිරීමෙන් පසුව

$$u_r = \frac{(\quad) - (\quad)}{(r)(r+1)(r+2)(r+3)}$$

$$u_r = \frac{\left[(r+3) - r\right] \times \frac{1}{3}}{(r)(r+1)(r+2)(r+3)}$$

දැන් u_r හි පද දෙක වෙන් කරන්න. පද අනුයාත පද දෙකක් ලෙස $f(r)$, $f(r+1)$ etc ලෙස ගොනු කර සියල්ල එකතු කර ගන්න.

Note:- පදයේ සාධක මෙන්ම පළමු ගැටලුවේදී ලබාදී ඇති නොවේ නම් ... ගොනු කළ නොහැක

2 ගැට ① $\frac{17}{1.3.5} + \frac{17}{2.4.6} + \frac{17}{3.5.7} + \cdots$

පද ගැලපෙන ලෙස සොයන්න.

$$u_r = \frac{17}{r(r+2)(r+4)}$$

$$u_r = \frac{\left[(r+4) - r\right] \frac{17}{4}}{r(r+2)(r+4)}$$

$$u_r = \frac{\frac{17}{4}\cancel{(r+4)}}{r(r+2)\cancel{(r+4)}} - \frac{\frac{17}{4}\cancel{(r)}}{\cancel{r}(r+2)(r+4)}$$

$$u_r = \frac{\frac{17}{4}}{r(r+2)} - \frac{\frac{17}{4}}{(r+2)(r+4)}$$

$$u_r = f(r) - f(r+2)$$

$$f(r) = \frac{17/4}{r(r+2)}$$

අවසාන පද කැපීමට ගොනුව

$r=1;\ u_1 = f(1) - f(3)$

$r=2;\ u_2 = f(2) - f(4)$

$r=3;\ u_3 = f(3) - f(5)$

$r=n-2;\ u_{n-2} = f(n-2) - f(n)$

$r=n-1;\ u_{n-1} = f(n-1) - f(n+1)$

$r=n;\ u_n = f(n) - f(n+2)$

$$\sum_{r=1}^{n} u_r = f(1) + f(2) - f(n+1) - f(n+2)$$

$$\sum_{r=1}^{n} u_r = \frac{17}{4} \times \frac{1}{1.(3)} + \frac{17}{4}\left[\frac{1}{2.4}\right] - \frac{17}{4} \times \frac{1}{(n+1)(n+3)} - \frac{17}{4}\,\frac{1}{(n+2)(n+4)}$$

ගැට ③ $\frac{8}{1^2.3^2} + \frac{16}{3^2.5^2} + \frac{24}{5^2.7^2} + \cdots$

පළමු පද ගැලපෙනය

$$u_r = \frac{8r}{(2r-1)^2.(2r+1)^2}$$

$$u_r = \frac{8r}{(2r-1)^2(2r+1)^2}$$

$$u_r = \frac{(2r+1)^2 - (2r-1)^2}{(2r-1)^2(2r+1)^2}$$

$$u_r = \frac{\cancel{(2r+1)^2}}{(2r-1)^2\cancel{(2r+1)^2}} - \frac{\cancel{(2r-1)^2}}{\cancel{(2r-1)^2}(2r+1)^2}$$

$$u_r = \frac{1}{(2r-1)^2} - \frac{1}{(2r+1)^2}$$

$u_r = f(r) - f(r+1)$ ආකාරය

↓

ශ්‍රේණියක පද n ගණ එකතුව හා ශ්‍රේණියේ අභිසාරීතාවය

Note: $\boxed{1}$ ශ්‍රිතයක $+\infty, -\infty$ වෙත සීමා

① බහුපද ශ්‍රිත

- වැඩිම බලය (අනුයාත) පදය (සංගුණකය + බලය) ට ආදේශ කරන්න

උදා:
$$\lim_{x\to\infty} 5-7x-x^5$$
$$\lim_{x\to\infty} -x^5$$
$$-\infty^5$$
$$(-\infty)$$

② පරිමේය ශ්‍රිත

- ලවයේ හා හරයේ වැඩිම බලය ඇති පද පමණක් ආදේශය

උදා:
$$\lim_{x\to\infty} \frac{1-2x-4x^5}{1+3x+2x^5}$$
$$\lim_{x\to\infty} \frac{-4x^5}{+2x^5}$$
$$-2$$

උදා:
$$\lim_{x\to\infty} \frac{5x^3+2x^2+1}{x^2+10}$$
$$\lim_{x\to\infty} \frac{5x^3}{x^2}$$
$$5.\infty$$
$$\infty$$

උදා:
$$\lim_{x\to\infty}\left(5+\frac{2x^2-7x+1}{1-x^2}\right)$$
$$\lim_{x\to\infty} 5 + \lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-7x+1}{1-x^2}$$
$$5 + \lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{-x^2}$$
$$5-2=3$$

$\boxed{2}$ ශ්‍රේණියක පද n වල එකතුව

$$S_\infty \Big/ \sum_{r=1}^{\infty} u_r$$

ඒ නිසා: - පළමුව S_n සොයන්න $\left(\sum_{r=1}^{n} u_r\right)$

- $$\boxed{S_\infty = \lim_{n\to\infty} S_n}$$

$\boxed{3}$ ශ්‍රේණියක අභිසාරීතාවය

- $S_\infty =$ පරිමිත $\longrightarrow$ ශ්‍රේණිය අභිසාරී වේ
- $S_\infty =$ පරිමිත නොවේ $(+\infty / -\infty)$ $\longrightarrow$ ශ්‍රේණිය අභිසාරී නොවේ (අපසාරී වේ)

2012 AL

① සියලු $x \in \mathbb{R}$ සඳහා $12x^2+1 = A(2x-1)^3 + B(2x+1)^3$ වන පරිදි A හා B නියත සොයන්න. එනයින් $r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $u_r = f(r) - f(r+1)$ වන පරිදි $f(r)$ සොයන්න.

මෙහි $u_r = \dfrac{12r^2+1}{(2r-1)^3(2r+1)^3}$

එමගින්
$$\sum_{r=1}^{n} u_r = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(2n+1)^3}$$ බව පෙන්වන්න.

$\sum_{r=1}^{\infty} u_r$ ශ්‍රේණිය අභිසාරී බව පෙන්වා

$\sum_{r=1}^{\infty} u_r$ හි ඓක්‍යය සොයන්න.

$$12x^2+1 = A(2x-1)^3 + B(2x+1)^3$$

$x^3 \to 0 = 8A + 8B$
$$0 = A + B \Rightarrow 0 = 1 + 2A$$

$x^0 \to 1 = -A + B$
$$(1+A) = B$$
$$A = -\tfrac{1}{2}$$
$$B = \tfrac{1}{2}$$

$$12x^2+1 = -\frac{1}{2}(2x-1)^3 + \frac{1}{2}(2x+1)^3$$

$x \to r$
$$(12r^2+1) = \frac{(2r+1)^3-(2r-1)^3}{2}$$

$$u_r = f(r) - f(r+1)$$

$$\frac{12r^2+1}{(2r-1)^3(2r+1)^3} = \frac{(2r+1)^3-(2r-1)^3}{2(2r-1)^3(2r+1)^3}$$

$$u_r = \underbrace{\frac{1/2}{(2r-1)^3}}_{f(r)} - \underbrace{\frac{1/2}{(2r+1)^3}}_{f(r+1)}$$

$u_r = f(r) - f(r+1)$ ආකාරය

$$f(r) = \frac{1/2}{(2r-1)^3}$$

$r=1;\ u_1 = f(1) - \cancel{f(2)}$

$r=2;\ u_2 = \cancel{f(2)} - \cancel{f(3)}$

$r=n-1;\ u_{n-1} = \cancel{f(n-1)} - \cancel{f(n)}$

$r=n;\ u_n = \cancel{f(n)} - f(n+1)$

$$\sum_{r=1}^{n} u_r = f(1) - f(n+1)$$

$$\sum_{r=1}^{n} u_r = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(2n+1)^3}$$

$$\sum_{r=1}^{\infty} u_r = \lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{n} u_r$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2(2n+1)^3}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2} - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2(2n+1)^3}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{\infty^3}$$

$$\sum_{r=1}^{\infty} u_r = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$$

S_∞ පරිමිත අගයක් බැවින් ශ්‍රේණිය අභිසාරී වේ.

$u_r = f(r+1) - f(r)$

අන්තර් සම්බන්ධතා යොදමු

$r=1;\ u_1 = \cancel{f(2)} - f(1)$

$r=2;\ u_2 = f(3) - \cancel{f(2)}$

$r=n-1;\ u_{n-1} = \cancel{f(n)} - f(n-1)$

$r=n;\ u_n = f(n+1) - \cancel{f(n)}$

$$\sum_{r=1}^{n} u_r = f(n+1) - f(1)$$

$$= (n+1)! - 1!$$

$$\sum_{r=1}^{n} u_r = (n+1)! - 1!$$

$$= (n+1)! - 1$$

~~② III ...~~

③ u_r; ක්‍රමාරෝපිත පද අඩංගු ශ්‍රේණි

පෙර u_r ලියාගන්න.
එක් පදයක් (ක්‍රමාරෝපිත නොවන) තවත් පදයක්, එකක් එකතු කරමින හෝ අඩු කරමින් ලියා ගන්න. ක්‍රමාරෝපිත පදයෙන් එක් කොටසක් ලබාගන්න. ක්‍රමාරෝපිත දෙකක අන්තරයක් ලැබෙන ලෙස, පසුව අන්තර් සම්බන්ධතා යොදන්න.

Note:-
$1! = 1$
$0! = 1$
$r! = r.(r-1)!$
$(r+1)! = (r+1)r!$

උදා: $1.1! + 2.2! + 3.3! - - -$
වල n පද දක්වා එකතුව සොයන්න

$u_r = r\,r!$

$= ([r+1]-[1])r!$

$= [r+1]r! - 1r!$

$u_r = \underbrace{(r+1)r!}_{} - \underbrace{r!}_{}$

$[(r+1)!]\ [r!]$

$u_r = \underbrace{(r+1)!}_{f(r+1)} - \underbrace{r!}_{f(r)}$

උදා: $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + -$

වල n පද දක්වා එකතුව

$$u_r = \frac{r}{(r+1)!}$$

$$u_r = \frac{(r+1-1)}{(r+1)!}$$

$$u_r = \frac{(r+1)}{(r+1)!} - \frac{1}{(r+1)!}$$

$$= \frac{\cancel{(r+1)}}{\cancel{(r+1)}r!} - \frac{1}{(r+1)!}$$

$$u_r = \underbrace{\frac{1}{r!}}_{f(r)} - \underbrace{\frac{1}{(r+1)!}}_{f(r+1)}$$

$u_r = f(r) - f(r+1)$

$r=1;\ u_1 = f(1) - \cancel{f(2)}$

$r=2;\ u_2 = \cancel{f(2)} - \cancel{f(3)}$

$r=n-1;\ u_{n-1} = \cancel{f(n-1)} - \cancel{f(n)}$

$r=n;\ u_n = \cancel{f(n)} - f(n+1)$

$$\sum_{r=1}^{n} u_r = f(1) - f(n+1)$$

$$= \frac{1}{1!} - \frac{1}{(n+1)!}$$

$$\sum_{r=1}^{n} u_r = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$$

④ ලඝුගණක ආශ්‍රිත ශ්‍රේණි

මිනෑම r ලඝුගණක නීති භාවිතයෙන්

$$\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b$$

උදා: $\log \frac{2}{3} + \log \frac{3}{4} + \log \frac{4}{5} + \dots$ ශ්‍රේණියේ r වන පදය සොයන්න

$$u_r = \log\left[\frac{r+1}{r+2}\right]$$

$$u_1 = \log(r+1) - \log(r+2)$$

$$u_r = f(r) - f(r+1)$$

$r=1;\ u_1 = f(1) - \cancel{f(2)}$

$r=2;\ u_2 = \cancel{f(2)} - \cancel{f(3)}$

$r=n-1;\ u_{n-1} = \cancel{f(n-1)} - \cancel{f(n)}$

$r=n;\ u_n = \cancel{f(n)} - f(n+1)$

$$\sum_{r=1}^{n} u_r = f(1) - f(n+1)$$

$$\sum_{r=1}^{n} u_r = \log(2) - \log(n+2)$$

⑤ ඝාතීය ශ්‍රිත ආශ්‍රිත ශ්‍රේණි

Note: $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$

$$e^1 = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$$

$$\boxed{e = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots}$$

උදා: ② $r \in \mathbb{Z}^+$ හා $r \geq 2$ වේ

$$\frac{2r^2+r+1}{r!} = \frac{A}{r!} + \frac{B}{(r-1)!} + \frac{C}{(r-2)!}$$

වන පරිදි A, B, C නියත සොයන්න.

(ii) $\frac{4}{1!} + \frac{11}{2!} + \frac{22}{3!} + \frac{37}{4!} + \dots$

$= 6e - 1$ බව පෙන්වන්න.

$$\frac{2r^2+r+1}{r!} = \frac{A}{r!} + \frac{B}{(r-1)!} + \frac{C}{(r-2)!}$$

$\times r!$

$$\cancel{2r^2+r+1 = \frac{A\,r!}{r!} + \frac{B\,r!}{(r-1)\,r!} + \frac{C\,r!}{(r-2)(r-1)\,r!}}$$

$$\frac{2r^2+r+1 \times r!}{r!} = \frac{A}{r!}\cdot r! + \frac{B(r-1)!\,r}{(r-1)!} + \frac{C\,r\,(r-1)(r-2)!}{(r-2)!}$$

$$2r^2+r+1 = A + Br + Cr(r-1)$$

$r^2;\ 2 = C \qquad$ නියත; $1 = A$

$r^1;\ 1 = B - C$

$B = 3$

$$\frac{2r^2+r+1}{r!} = \frac{1}{r!} + \frac{3}{(r-1)!} + \frac{2}{(r-2)!}$$

$$u_r = \frac{2r^2+r+1}{r!}$$

$$u_r = \frac{1}{r!} + \frac{3}{(r-1)!} + \frac{2}{(r-2)!}$$

r=1 අර්ථ දක්වා නොහැක

නිශේධ සංඛ්‍යාවල (−) ක්‍රමාරෝපිත නැත

$\therefore r=2;\ u_2 = \frac{1}{2!} + \frac{3}{1!} + \frac{2}{0!}$

$r=3;\ u_3 = \frac{1}{3!} + \frac{3}{2!} + \frac{2}{1!}$

$r=4;\ u_4 = \frac{1}{4!} + \frac{3}{3!} + \frac{2}{2!}$

$$\sum_{r=2}^{n} u_r = \left[\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots\right] + 3\left[\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots\right] + 2\left[1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots\right]$$

$$\sum_{r=2}^{n} u_r = \left[\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots\right] + 3\left[1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots\right] + 2\left[2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots\right]$$

$$= e - 2 + 3[e-1] + 2e$$

$$= 6e - 5$$

පළමු පදය (u_1) එකතු කළ විට

$$\sum_{r=1}^{n} u_r = 6e - 5 + \frac{(2+2)}{1!}$$

$$\sum_{r=1}^{n} u_r = 6e - 5 + 4$$

$$\sum_{r=1}^{n} u_r = 6e - 1$$

වෙනස් ප්‍රකාශනවලින් / අන්තර ක්‍රමය මගින් ලබා ගැනීම

① $\frac{1}{(\sqrt{3}+\sqrt{1})} + \frac{1}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})} + \cdots$

$$u_r = \frac{1}{\sqrt{2r+1}+\sqrt{2r-1}} \times \frac{(\sqrt{2r+1}-\sqrt{2r-1})}{(\sqrt{2r+1}-\sqrt{2r-1})}$$

$$u_r = \frac{\sqrt{2r+1}-\sqrt{2r-1}}{\cancel{2r}+1-\cancel{2r}+1}$$

$$u_r = \frac{1}{2}\left[\sqrt{2r+1}-\sqrt{2r-1}\right]$$

$$2u_r = \underbrace{\sqrt{2r+1}}_{f(r)} - \underbrace{\sqrt{2r-1}}_{f(r-1)}$$

$$2u_r = f(r) - f(r-1)$$

$r=1;\ 2u_1 = \cancel{f(1)} - f(0)$

$r=2;\ 2u_2 = \cancel{f(2)} - \cancel{f(1)}$

$\vdots$

$r=n-1;\ 2u_{n-1} = \cancel{f(n-1)} - \cancel{f(n-2)}$

$r=n;\ 2u_n = f(n) - \cancel{f(n-1)}$

$$2\sum_{r=1}^{n} u_r = f(n) - f(0)$$

$$\sum_{r=1}^{n} u_r = \frac{\sqrt{2n+1}-1}{2}$$

පදවල ගුණෝත්තර ශ්‍රේණියක් ලෙස ඇති විට / පළමු S_n සෙවීම

① $1 + (1+3) + (1+3+3^2) + (1+3+3^2+3^3) + \cdots$

පළමු පද n වල එකතුව

$$u_r = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^{(r-1)}$$

පද r තෙක් ගුණෝත්තර ශ්‍රේණියක්

$a = 1$

$r = 3$

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{(1-r)}$$

$$u_r = \frac{1(1-3^r)}{1-3}$$

$$u_r = \frac{(3^r-1)}{2}$$

දැන් එකතුව ගනිමු.

$$\sum_{r=1}^{n} u_r = \sum_{r=1}^{n} \frac{(3^r-1)}{2}$$

$$= \sum_{r=1}^{n} \frac{3^r}{2} - \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n} 3^r - \frac{1}{2}\cdot n$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sum_{r=1}^{n} 3^r - n\right]$$

ගුණෝත්තර ශ්‍රේණියක්

I පදය = 3, $r = 3$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{3(1-3^n)}{(1-3)} - n\right]$$

$$\sum_{r=1}^{n} u_r = \frac{1}{2}\left[+3\frac{(3^n-1)}{2} - n\right]$$

පදවල විශේෂ ශ්‍රේණි ක්‍රම

ඔව. S_n සෙවීම

① $1 + \frac{1}{(1+2)} + \frac{1}{(1+2+3)} \cdots$ පළමු පද n හි එකතුව

$$u_r = \frac{1}{1+2+3+\cdots+r}$$

$$u_r = \frac{1}{\frac{\cancel{r}}{2}(r+1)}$$

$$u_r = \frac{2}{r(r+1)}$$

$$u_r = \frac{2[(r+1)-r]}{r(r+1)}$$

$$u_r = \frac{2}{r} - \frac{2}{(r+1)}$$

$$u_r = f(r) - f(r+1)$$

② $\frac{3}{1^3} + \frac{5}{1^3+2^3} + \frac{7}{1^3+2^3+3^3} + \cdots$ පළමු n පද එකතුව

$$u_r = \frac{(2r+1)}{(1^3+2^3+\cdots+r^3)}$$

$$u_r = \frac{(2r+1)}{\left[\frac{r}{2}(r+1)\right]^2}$$

$$u_r = \frac{4(2r+1)}{r(r+1)^2}$$

$$u_r = \frac{4[(r+1)^2 - r^2]}{r(r+1)^2}$$

$$u_r = \frac{4}{r} - \frac{4}{(r+1)^2}$$

$$u_r = f(r) - f(r+1)$$

$S_n\left(\sum_{r=1}^{n} u_r\right)$ දෙන ලද විට

පදය සෙවීම.

Note: $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$

$$S_n = S_{n-1} + u_n$$

$$\boxed{u_n = S_n - S_{n-1}}$$

2.1) ශ්‍රේණියක පළමු පද n හි එකතුව $= S_n$ නම්; $S_n = n^2$ වේ. r වන පදය සොයන්න (u_r)

$$u_r = S_n - S_{n-1}$$

$$u_r = n^2 - (n-1)^2$$

$$= \cancel{n^2} - \cancel{n^2} + 2n - 1$$

$$u_r = 2r - 1$$

2.2) $S_n = n(n+1)(n+2)$ නම්; u_r සොයන්න.

$$u_r = S_n - S_{n-1}$$

$$= n(n+1)(n+2) - (n-1)(n)(n+1)$$

$$u_r = (n+1)(\cancel{n^2} + 2n - \cancel{n^2} + n)$$

$$= 3n(n+1)$$

$$u_r = 3r(r+1)$$

ගුණෝත්තර ශ්‍රේණියක් අභිසාරී වීම.

ගුණෝත්තර ශ්‍රේණියක් අභිසාරී වීමට;

$$\boxed{\begin{array}{c} -1 < \text{පොදු අනුපාතය} < 1 \\ \text{හෝ} \\ (\text{පොදු අනුපාතයේ})^2 < 1 \end{array}}$$

විය යුතුය.

2.3) $2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{3^2} + \cdots$ ශ්‍රේණිය අභිසාරී වේ.

මෙය ගුණෝත්තර ශ්‍රේණියකි

පොදු අනුපාතය $= \frac{1}{3}$

$-1 < \frac{1}{3} < 1$ නිසා,

$\therefore$ අභිසාරී වේ.

2. ii) a) $1 + (x+3) + (x+3)^2 + (x+3)^3 + \cdots$

ගුණෝත්තර ශ්‍රේණිය අභිසාරී වීමට x හි අගය පරාසය

අනන්ත එකතුවක් පැවතීමට [illegible]

$(x+3)^2 < 1$ වේ.

$(x+3)^2 - 1 < 0$

$(x+4)(x+2) < 0$

$x = -4$ $\qquad$ $x = -2$

$+$ $\qquad$ $-$ $\qquad$ $+$

$-4 < x < -2$ //

ගුණෝත්තර ශ්‍රේණියක n පද ඓක්‍ය

සොයන ආකාරය

$$S_n = a\frac{(1 - x^n)}{(1 - x)}$$

ගුණෝත්තර ශ්‍රේණියක් අභිසාරී වීමට

$-1 < x < 1$ විය යුතුය

$x^\infty \longrightarrow 0$

$$S_\infty = a\frac{(1 - x^\infty)}{(1 - x)}$$

$$S_\infty = \frac{a}{(1 - x)}$$ //

සමාන්තර - ගුණෝත්තර ශ්‍රේණිවල

පද n වල ඓක්‍යය

පියවර

① S_n ලියා, පොදු අනුපාතයෙන් ගුණකර, අඩුකිරීම ① - ② = ③

② දෙවන වරට පොදු අනුපාතයෙන් ගුණකර අඩුකිරීම ③ - ④

① $1.1 + 2.2 + 3.2^2 + 4.2^3 + 5.2^4 + \ldots$

I) ශ්‍රේණියේ පළමු පද n වල ඓක්‍යය

$S_n = 1.1 + 2.2^1 + 3.2^2 + 4.2^3 + \ldots + (n-1)2^{n-2} + n.2^{n-1}$ — ①

① × 2

$2S_n = 1.2^1 + 2.2^2 + 3.2^3 + \ldots + (n-1)2^{n-1} + n2^n$ — ②

① − ②

$-S_n = 1.1 + 1.2^1 + 1.2^2 + 1.2^3 + \ldots + 1.2^{n-1} - n.2^n$ — ③

③ × 2

$-2S_n = 1.2 + 1.2^2 + 1.2^3 + 1.2^4 + \ldots + 1.2^{n-1} + 1.2^n - n.2^{n+1}$ — ④

③ − ④

$S_n = 1.1 - (n+1)2^n + n.2^{n+1}$

② $1.5 + 3.5^2 + 5.5^3 + 7.5^4 + \ldots + (2n-1)5^n$

පද n වල ඓක්‍යය සොයන්න.

$S_n = 1.5 + 3.5^2 + 5.5^3 + \ldots + (2n-1)5^n$ — ①

3.24

× 5

$5S_n = 1.5^2 + 3.5^3 + 5.5^4 + \ldots + (2n-3)5^n + (2n-1)5^{n+1}$ — ②

① − ②

$-4S_n = 1.5 + 2.5^2 + 2.5^3 + \ldots + 2.5^n - (2n-1)5^{n+1}$ — ③

③ × 5

$-20S_n = 1.5^2 + 2.5^3 + 2.5^4 + \ldots + 2.5^{n+1} - (2n-1)5^{n+1}$ — ④

③ − ④

$16S_n = 1.5 + 1.5^2 + (2n+1)5^{n+1}$

$S_n = \frac{1}{16}[\quad . \quad - \quad]$