කලනය

කලනය
- සීමාව
- සන්තතතාවය
- අවකලනය
- අනුකලනය

සීමාව

ස්වායත්ත විචල්‍යයක් යම් අගයකට ආසන්න වීමේදී එම විචල්‍ය පදනම් ශ්‍රිතයක් ආසන්න වන අගය සීමාව වේ.

සංකල්පය කිරීම

උදා: $f(x) = x+4$ සලකන්න.

x, 2ට ආසන්න වන විට, $f(x)$ ආසන්න වන අගය සොයන්න.

1 පියවර
$x = 1.9$ විට; $f(x) = 5.9$
$x = 1.99$ විට; $f(x) = 5.99$
$x = 2$ විට; $f(x) = 6$
$x = 2.01$ විට; $f(x) = 6.01$
$x = 2.1$ විට; $f(x) = 6.1$

2 පියවර

x: 1.9, 1.99, 2, 2.01, 2.10

$f(x)$: 5.9, 5.99, 6, 6.01, 6.10

3 පියවර
x, 2ට ආසන්න වන විට, $f(x)$, 6ට ආසන්න වේ.

4 පියවර
සීමා $f(x) \to 6$
$x \to 2$

5 පියවර

$$\boxed{\lim_{x \to 2} f(x) \to 6}$$

Note: ගණනයේදී භාවිතා කරන ප්‍රකාශන,

① $\frac{0}{a} = 0$

② $\frac{a}{0}$ = අර්ථ නොදැක්වේ.
$\frac{1}{0} \to \infty$

③ $\frac{0}{0}$ = අර්ථ නොදැක්වේ

④ $\left.\begin{array}{l}\infty + k = \infty \\ \infty - k = \infty\end{array}\right\}$ K, නියත අගයක් නම්
$\infty \times k = \infty$
$\infty \times \infty = \infty$
$\infty + \infty = \infty$
$\infty^{\infty} = \infty$

⑤ $\infty - \infty$ = අර්ථ නොදැක්වේ.
$\frac{\infty}{\infty}$ = අර්ථ නොදැක්වේ
$\infty \times 0$ = අර්ථ නොදැක්වේ
∞^0 = අර්ථ නොදැක්වේ.

උදා: ශ්‍රිතය එක් එක් ක්‍රමවලට අගයන් ආදේශ කර විචල්‍යයේ අගය ශ්‍රිතයට ආදේශ කිරීම සිදුකළ හැක.

① $\lim_{x \to (-1)} x^3+5x+1$
$(-1)^3+5(-1)+1$
$-1-5+1$
-5

② $\lim_{x \to 1} \frac{x^{11}-1}{x-1}$
$\frac{1-1}{1-1}$
$\frac{0}{0}$ (අර්ථ නොදැක්වේ)

** අර්ථ දැක්වෙන ශ්‍රිතයක් සහිත ගණනයක් අර්ථ නොදැක්වෙන විට සුලු කළ යුතුය, එය වඩා සුදුසු ක්‍රමයකින් අර්ථ දැක්වෙන ශ්‍රිතයක් බවට පත් කර ගනී.
මෙහිදී සූත්‍ර භාවිතා කෙරේ.

සීමා සෙවීමේ ආකාර
- ① සාධක / පරිමේයකරණ සීමා
- ② ත්‍රිකෝණමිතික ශ්‍රිතවල සීමා
- ③ ඝාතීය ශ්‍රිතවල සීමා
- ④ ලඝුගණක ශ්‍රිතවල සීමා
- ⑤ ලොපිටාල්

01 සාධක / පරිමේයකරණ සීමා

සාධක / පරිමේයකරණ සීමා
- ① සාධක සොයා ගැනීම
- ② පරිමේයකරණ සීමා සම්බන්ධ ප්‍රශ්න ගණනය.
- ③ විශේෂිත ආකාර
- ④ සූත්‍ර

① සාධකකරණය

** පලමුව සාධක සාදා ගත හැකි ප්‍රකාශනයක් සුලු කර අගය ආදේශ කරන්න.
** අගය ආදේශ කරන විට $\lim_{x \to n}$ ඉවත් කරන්න.

උදා: $\lim_{x \to 3} \frac{x^2-9}{x^2-4x+3}$

$\lim_{x \to 3} \frac{\cancel{(x-3)}(x+3)}{\cancel{(x-3)}(x-1)}$

$\lim_{x \to 3} \frac{(x+3)}{(x-1)}$

$\frac{3+3}{3-1} = \frac{6}{2} = 3$

සටහන - ඒකජ ආකාර ඉවත් කර - සාධක දෙකක් විශේෂ ප්‍රකාශන

උදා:- $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-1}{x^2-6x+5}$

සටහන
- සාධක වලට වෙන් කිරීම
- සාධාරණ වර්ග ප්‍රකාශන

$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\cancel{(x-1)}(x^2+x+1)}{(x-5)\cancel{(x-1)}}$

$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x^2+x+1)}{(x-5)}$

$\dfrac{1+1+1}{1-5} = \dfrac{3}{-4} \quad \therefore -3/4$ //

උදා:- $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-3x+2}{x^2-1}$

සටහන
- භාජක ප්‍රමේයය භාවිතය.
lim එකේ $x\to 1$ නිසා $(x-1)$ සාධකයක් වේ
- දිගු බෙදීම

$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\cancel{(x-1)}(x^2+x-2)}{\cancel{(x-1)}(x+1)}$

$\dfrac{1+1-2}{1+1} = \dfrac{0}{2} = 0$ //

② ප්‍රමේයයක්

පරිමේය ප්‍රකාශන වල සීමා පිළිබඳ ප්‍රමේයය

$\boxed{\text{a යනු නියතයක් ද, n යනු පරිමේය සංඛ්‍යාවක් ද නම්,} \quad \lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^n-a^n}{x-a} = n\cdot a^{(n-1)}}$

උදා:- $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^{-5}-2^{-5}}{x-2}$

$-5\cdot 2^{(-6)}$

$-5\cdot \dfrac{1}{2^6}$

$\dfrac{-5}{64}$ //

උදා:- $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^{-9}-1^{-9}}{x-1}$

$-9\cdot 1^{(-9-1)}$

$-9\cdot 1^{(-10)}$

-9 //

උදා:- $\lim\limits_{x\to 64} \dfrac{x^{1/3}-64^{1/3}}{x-64}$

$\dfrac{1}{3}\cdot 64^{(1/3-1)}$

$\dfrac{1}{3}\cdot 64^{-2/3}$

$\dfrac{1}{3}\cdot \dfrac{1}{4^{3\times 2/3}}$

$\dfrac{16}{\times 3}$
$\overline{48}$

$\dfrac{1}{3}\cdot \dfrac{1}{4^2}$

$1/48$ //

උදා:- $\lim\limits_{x\to 49} \dfrac{x^{1/2}-7}{x-49}$

$\lim\limits_{x\to 49} \dfrac{x^{1/2}-49^{1/2}}{x-49}$

$\dfrac{1}{2}\, 49^{(1/2-1)}$

$\dfrac{1}{2}\cdot \dfrac{1}{\sqrt{49}}$

$1/14$ //

උදා:- $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^5-x^{-5}}{x-1}$

1 ක්‍රමය

$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^{-5}(x^{10}-1)}{x-1}$

$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{x^5}\, \dfrac{(x^{10}-1^{10})}{1-1}$

$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{x^5} \quad 10\cdot 1^9$

$\dfrac{10}{1}$

10 //

2 ක්‍රමය

$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^5-\frac{1}{x^5}}{x-1}$

$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^{10}-1}{x^5(x-1)}$

$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{x^5}\cdot \dfrac{x^{10}-1^{10}}{(x-1)}$

$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{x^5}\cdot 10\cdot 1^{11}$

$\dfrac{10}{1} = 10$ //

උදා:- $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^m-1}{x^n-1}$

$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\dfrac{x^m-1}{(x-1)}}{\dfrac{x^n-1}{(x-1)}} \quad \begin{matrix}\div(x-1)\\ \div(x-1)\end{matrix}$

$\dfrac{m\cdot 1^{(m-1)}}{n\cdot 1^{(m-1)}}$

$\dfrac{m}{n}$ //

උදා: $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^a - x^b}{x^c - x^d}$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^b(x^{(a-b)}-1)}{x^d(x^{(c-d)}-1)}$$

$\div(x-1)$
$\div(x-1)$

$$\frac{x^b}{x^d}\frac{\dfrac{(x^{a-b}-1)}{(x-1)}}{\dfrac{(x^{c-d}-1)}{x-1}}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^b}{x^d}\frac{(a-b)\,1^{(a-b-1)}}{(c-d)\,1^{(c-d-1)}}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^b}{x^d} \times \frac{(a-b)}{c-d}$$

$$\frac{(a-b)}{(c-d)}$$

$\boxed{\text{සීමාවේ ප්‍රමේයන්}}$

* ඇත්තටම ඔබට කලින් ඉගෙන limit ප්‍රමේය limit ... හා ... දුර නැත

Marking ... ...

① නියත සංඛ්‍යාවක සීමාව එම සංඛ්‍යාවම වේ.

k නියතයකි

$$\lim_{x\to a} k$$

$$k$$

② නියතයක් ශ්‍රිතයකින් ගුණ කර ඇතිවිට එම නියතය සීමාවෙන් පිටතට ගත හැක

$$\lim_{x\to a} k f(x)$$

$$k\left[\lim_{x\to a} f(x)\right]$$

③ ශ්‍රිත දෙකක එකතුවක සීමාවක් ඇතිවිට එය වෙන වෙනම සීමාවල එකතුවට සමානවේ

$$\lim_{x\to a} [f(x) + g(x)]$$

$$\lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$$

④ ශ්‍රිත දෙකක අන්තරයක සීමාවක් ඇතිවිට එය වෙන වෙනම සීමාවල අන්තරයක් ලෙස ලිවිය හැක

$$\lim_{x\to a} [f(x) - g(x)]$$

$$\lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x)$$

⑤ ගුණිතයක සීමාවක් ඇතිවිට එය වෙන වෙනම සීමාවල ගුණිතයක් ලෙස ලිවිය හැක.

$$\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x)$$

$$\lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$$

⑥ ශ්‍රිත දෙකක බෙදීමක සීමාව ඇතිවිට එය වෙන වෙනම සීමාවල බෙදීමක් ලෙස ලිවිය හැක.

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$\frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$$

⑦ ශ්‍රිතයක බලයක සීමාවක් ලබාගැනීමට ඇතිවිට සීමාවේ බලයට ගෙන යා හැක.

$$\lim_{x\to a} [f(x)]^n$$

$$\left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^n$$

⑧ ශ්‍රිතයක පරස්පරයක සීමාවක් ලබාගැනීමට ඇතිවිට ශ්‍රිතයේ සීමාව ගෙන එහි පරස්පරය ගත හැක.

$$\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)}$$

$$\frac{1}{\lim_{x\to a} f(x)}$$

$\boxed{\text{③ වර්ගමූල ඇතුළත් ගැටළු}}$

* වර්ගමූල ඇති පදයක් ප්‍රශ්නයක ... ඇත්නම්, එහි ප්‍රතිබද්ධ ප්‍රකාශනයෙන් ගුණ කරන්න.

උදා: $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x+6} - \sqrt{7}}{(x^2-1)}$

$$\lim_{x\to 1} \frac{(\sqrt{x+6}-\sqrt{7}) \times (\sqrt{x+6}+\sqrt{7})}{(x-1)(x+1)\;(\sqrt{x+6}+\sqrt{7})}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{(x+6-7)}{(x-1)(x+1)(\sqrt{x+6}+\sqrt{7})}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{(x+1)(\sqrt{x+6}+\sqrt{7})}$$

$$\frac{1}{2(2\sqrt{7})} = \frac{1}{4\sqrt{7}}$$

2.30' $\lim_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x+4} - \sqrt{5}}{\sqrt{x+15} - 4}$

$\lim_{x \to 1} \dfrac{(\sqrt{x+4} - \sqrt{5})}{(\sqrt{x+15} - 4)} \times \dfrac{(\sqrt{x+4} + \sqrt{5})}{(\sqrt{x+4} + \sqrt{5})} \times \dfrac{(\sqrt{x+15} + 4)}{(\sqrt{x+15} + 4)}$

$\lim_{x \to 1} \dfrac{\cancel{(x+4-5)}\,(\sqrt{x+15} + 4)}{\cancel{(x+15-16)}\,(\sqrt{x+4} + \sqrt{5})}$

$\lim_{x \to 1} \dfrac{\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}} \dfrac{(\sqrt{x+15} + 4)}{(\sqrt{x+4} + \sqrt{5})}$

$\dfrac{4+4}{2\sqrt{5}} = \dfrac{8}{2\sqrt{5}} = \dfrac{4}{\sqrt{5}}$

HW. 2.30.

2.30' $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$

$\lim_{x \to 1} \cancel{\dfrac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)}}$

$\lim_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 1^3}{(x-1)(x+1)}$

$\lim_{x \to 1} 3 \cdot 1^2 \times \dfrac{1}{(x+1)}$

$\dfrac{3}{2}$

2.31 $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^5 - 32}{x^3 - 8}$

$\lim_{x \to 2} \dfrac{x^5 - 2^5}{(x-2)} \times \dfrac{1}{(x^2+2x+4)}$

$5 \cdot 2^4 \times \dfrac{1}{(4+4+4)}$

$= \dfrac{\cancel{16} \times 5}{\cancel{12}\, 3} \quad \dfrac{10}{3}$

2.26' $\lim_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x^3 - x}}{(\sqrt{x^2-1} + \sqrt{x-1})}$

$\cancel{\dfrac{\sqrt{x(x-1)(x+1)}}{\sqrt{x^2-1} + \sqrt{x-1}} \times \dfrac{\sqrt{x^2-1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2-1} - \sqrt{x-1}}}$

$\cancel{\dfrac{\sqrt{x}\sqrt{x-1}\sqrt{x+1} \times (\sqrt{x^2-1} - \sqrt{x-1})}{x^2 - x}}$

$\cancel{\dfrac{\sqrt{x}\sqrt{x-1}\sqrt{x+1} \times (\sqrt{x^2-1} - \sqrt{x-1})}{x(x-1)(x+1)}}$

$\dfrac{\sqrt{x(x-1)(x+1)}}{\sqrt{x-1}\,(\sqrt{x+1} + \cancel{1})}$

$\dfrac{\sqrt{x}\sqrt{(x+1)}}{\sqrt{x+1} + \cancel{\sqrt{x+1}}\, 1}$

$\lim_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x(x+1)}}{\sqrt{x+1} + 1}$

$\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$

2.30' $\lim_{x \to 7} \dfrac{\sqrt{x+9} - 4}{\sqrt{9-x} - \sqrt{2}}$

$\lim_{x \to 7} \dfrac{\sqrt{x+9} - 4}{\sqrt{9-x} - \sqrt{2}} \times \dfrac{\sqrt{x+9} + 4}{\sqrt{x+9} + 4} \times \dfrac{\sqrt{9-x} + \sqrt{2}}{\sqrt{9-x} + \sqrt{2}}$

$\lim_{x \to 7} \dfrac{(x+9-16)}{(9-x-2)} \times \dfrac{\sqrt{9-x} + \sqrt{2}}{\sqrt{x+9} + 4}$

$\lim_{x \to 7} \dfrac{(x-7)}{(7-x)} \times \dfrac{\sqrt{9-x} + \sqrt{2}}{\sqrt{x+9} + 4}$

CamScanner

$$\lim_{x\to 7} \frac{(x-7)}{(7-x)} \times \frac{\sqrt{9-x}+\sqrt{2}}{\sqrt{x+9}+4}$$

$$\lim_{x\to 7} -\frac{\cancel{(7-x)}}{\cancel{(7-x)}} \times \frac{\sqrt{9-x}+\sqrt{2}}{\sqrt{x+9}+4}$$

$$\lim_{x\to 7} \frac{-(\sqrt{9-x}+\sqrt{2})}{(\sqrt{x+9}+4)}$$

$$\frac{-(\sqrt{2}+\sqrt{2})}{4+4}$$

$$\frac{-\sqrt{2}}{4}$$

(-) අනිවාර්යයෙන්

02 ත්‍රිකෝණමිතික ශ්‍රිතවල සීමා ගැටලු

ත්‍රිකෝණමිතික ශ්‍රිතවල සීමා ගැටලු

1. සූත්‍ර ආදේශ ක්‍රමයේ ගැටලු
2. ප්‍රමේය මගින් ගැටලු
3. ශ්‍රිතවල ආකාර ගැටලු
4. ආදේශ ක්‍රමයේ ගැටලු

1 සූත්‍ර ආදේශ ක්‍රමයේ ගැටලු

* සාධක වෙන්කර, කපාහැර, සූත්‍රයට ආදේශ කරන්න.

උදා 1

$$\lim_{x\to \pi/3} \frac{2\cos^2 x - 3\cos x + 1}{4\cos^2 x - 1}$$

$2x^2 - 3x + 1$

$2x^2 - 2x - 1x + 1$

$2x(x-1) - 1(x-1)$

$(x-1)(2x-1)$

$$\lim_{x\to \pi/3} \frac{(\cos x - 1)\cancel{(2\cos x - 1)}}{\cancel{(2\cos x - 1)}(2\cos x + 1)}$$

$$\lim_{x\to \pi/3} \frac{(\cos x - 1)}{(2\cos x + 1)}$$

$$\frac{\frac{1}{2}-1}{1+1}$$

$$= -\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$$

ප්‍රමේය මගින් විසඳන ගැටලු :-

* ත්‍රිකෝණමිතික ශ්‍රිතවල සීමා සඳහා ප්‍රමේය :-

x අනුරේඛනය වලින් මනින ලද කෝණයක් නම්,

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$$

* මෙම ප්‍රමේය ගැටලුවලදී ඕනෑම ආකාරයට යොදාගත හැක

$$\boxed{\lim_{\square\to 0} \frac{\sin \square}{\square} = 1}$$

උදා :- $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3\tan x)}{3\tan x} = 1$

1. $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin\left(\frac{3x}{2}\right)}{x}$$

$$\underbrace{\left(\lim_{x\to 0} \frac{\sin\left(\frac{3x}{2}\right)}{\frac{3x}{2}}\right)}_{=1} \times \frac{3}{2}$$

$$1 \times \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

2. $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^3 2x}{x^3}$$

$$\left(\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)^3\right) \times 8$$

$$1 \times 8 = 8$$

3. $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^3 \frac{5x}{2}}{x}$$

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin \frac{5x}{2}}{\frac{5x}{2}}\right)^3 \times \frac{125}{8}$$

$$1 \times \frac{125}{8} = \frac{125}{8}$$

4. $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 7x - 4x}{\sin 6x + 3x}$$

$\div x$, $\div x$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin 7x}{x} - \frac{4x}{x}}{\frac{\sin 6x}{x} + \frac{3x}{x}}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{7 \times \left(\frac{\sin 7x}{7x}\right) - 4}{6 \times \left(\frac{\sin 6x}{6x}\right) + 3}$$

$$\frac{7-4}{6+3} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

⑤ $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(2\sin x)}{\sin^2 x}$ $\qquad \cos 2x = 1-2\sin^2 x$

$\lim_{x\to 0} \dfrac{\cancel{1}-[\cancel{1}-2\sin^2(\sin x)]}{\sin^2 x}$

$\lim_{x\to 0} \dfrac{2\sin^2(\sin x)}{\sin^2 x}$

$\lim_{x\to 0} 2\left(\dfrac{\sin(\sin x)}{\sin x}\right)^2$

2 //

⑥ $\lim_{x\to 0} \dfrac{1+x\sin 3x-\cos 2x}{x^2+\sin^2 5x}$

* cos → sin බවට හරවනවා
∵ ප්‍රමේය sin වලට පමණක්
වලංගුයි.

$\lim_{x\to 0} \dfrac{\cancel{1}+x\sin 3x-\cancel{1}+2\sin^2 x}{x^2+\sin^2 5x}$

$\div x^2$
$\div x^2$ $\lim_{x\to 0} \dfrac{\frac{x\sin 3x}{x^2}+\frac{2\sin^2 x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{\sin^2 5x}{x^2}}$

$\lim_{x\to 0} \dfrac{\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)\times 3+2\left(\frac{\sin^2 x}{x^2}\right)}{1+\left(\frac{\sin 5x}{5x}\right)^2\times 25}$

$\dfrac{3+2}{1+25} = \dfrac{5}{26}$ //

⑦ $\lim_{x\to 0} \dfrac{5x+\tan 2x}{3x+\tan 7x}$

* sin cos ලෙස බිඳ ලියනවා.
sin ප්‍රමේය ගනිමින්
ඉතිරි ටික පසුව ආදේශ කරනවා

$\lim_{x\to 0} \dfrac{5x+\sin 2x\times\frac{1}{\cos 2x}}{3x+\sin 7x\times\frac{1}{\cos 7x}}$

$\div x$
$\div x$ $\lim_{x\to 0} \dfrac{5+\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)\times\frac{2}{\cos 2x}}{3+\left(\frac{\sin 7x}{7x}\right)\times\frac{7}{\cos 7x}}$

$\lim_{x\to 0} \dfrac{5+\frac{2}{\cos 2x}}{3+\frac{7}{\cos 7x}}$

$\cos 0 = 1$

$\dfrac{5+2}{3+7}$

$7/10$ //

⑧ $\lim_{x\to 0} \dfrac{x}{\sin x}$

$\lim_{x\to 0} \dfrac{1}{\frac{\sin x}{x}}$

$\dfrac{1}{1} = 1$ //

සැලකිය :- ත්‍රිකෝණමිතික ශ්‍රිත සීමාව
මූලධර්මයන් භාවිතයෙන්
පහත ආකාරයට පෙන්වා දිය
හැකිය

$\boxed{\lim_{x\to 0} \dfrac{x}{\sin x} = 1}$

ත්‍රිකෝණමිතික ශ්‍රිත සීමා මූලික ප්‍රමේයය
සාධාරණව පහත ආකාරයෙන් ලියයි.

$\boxed{\lim_{\substack{x\to \\ ▨\to 0}} \dfrac{\sin ▨}{▨} = 1}$

මෙම ප්‍රමේයය ඉතාම වැදගත්
වෙනවා

1. උදා $\lim_{x\to 2} \dfrac{\sin(x-2)}{(x-2)} = 1$

$(x-2)\to(2-2)$
$(x-2)\to 0$ ✓

1. උදා $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sin(x+10)}{(x+10)} = \dfrac{\sin(11)}{11}$ //

$x+10\to 1+10$
$x+10\to 11$ ✗ $\neq 1$

2. උදා $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(\sin x)}{\sin x}$

$x\to 0$
$\sin x\to\sin 0$
$\sin x\to 0$ ✓ $=1$

2. උදා $\lim_{x\to 3} \dfrac{\sin x}{x} \neq 1$

$x\to 3$ ✗

$\left(\dfrac{\sin 3}{3}\right)$

* ▨ → 0 විය යුතුයි. එමනිසා lim $x\to 0$
වුවත් ප්‍රමේය ලියන්න ▨ → 0 නොවේ

③ ත්‍රිකෝණමිතික ආශ්‍රිත ගැටලු :

• ත්‍රිකෝණමිතික ආකාර සහිත ප්‍රකාශනවලින් ප්‍රමාණ හා අවශ්‍ය සූත්‍ර යොදාගනිමින්, ප්‍රථමයෙන් සීමා අගය ආදේශ කරමින්.

උදා. ① $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{7+\sin^2 x} - \sqrt{7}}{\sqrt{5+x^2} - \sqrt{5}}$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{7+\sin^2 x} - \sqrt{7}}{\sqrt{5+x^2} - \sqrt{5}} \times \dfrac{\sqrt{7+\sin^2 x} + \sqrt{7}}{\sqrt{7+\sin^2 x} + \sqrt{7}} \times \dfrac{\sqrt{5+x^2} + \sqrt{5}}{\sqrt{5+x^2} + \sqrt{5}}$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(\cancel{7}+\sin^2 x - \cancel{7}) \times (\sqrt{5+x^2} + \sqrt{5})}{(\cancel{5}+x^2 - \cancel{5})(\sqrt{7+\sin^2 x} + \sqrt{7})}$

$\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2 \times \dfrac{(\sqrt{5+x^2} + \sqrt{5})}{(\sqrt{7+\sin^2 x} + \sqrt{7})}$

$1 \times \dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{7}} = \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}$ //

උදා. ② $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1-\tan x}}{x}$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1-\tan x})(\sqrt{1+\tan x} + \sqrt{1-\tan x})}{x(\sqrt{1+\tan x} + \sqrt{1-\tan x})}$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cancel{1}+\tan x - \cancel{1} + \tan x}{x(\sqrt{1+\tan x} + \sqrt{1-\tan x})}$

$\lim\limits_{x\to 0} 2\left(\dfrac{\sin x}{x}\right) \times \dfrac{1}{\cos x} \times \dfrac{1}{\sqrt{1+\tan x} + \sqrt{1-\tan x}}$

$\dfrac{2}{\cos x} \times \dfrac{1}{\sqrt{1+\tan x} + \sqrt{1-\tan x}}$

$\dfrac{2}{1} \times \dfrac{1}{\sqrt{1+0} + \sqrt{1-0}}$

$\dfrac{2}{1} \times \dfrac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{1}}$

$\dfrac{\cancel{2}}{1} \times \dfrac{1}{\cancel{2}}$

1 //

උදා. ③ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan 5x - \sin 5x}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(\tan 5x - \sin 5x)(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}{(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(\tan 5x - \sin 5x)(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}{2x}$

$\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\sin 5x - \sin 5x \cos 5x}{\cos 5x \times 2x}\right)(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})$

$\dfrac{2\sin 5x}{2x} \ldots \left(\dfrac{\sin 10x}{10x}\right) \times 5$

$\lim\limits_{x\to 0} \left[\left(\dfrac{\sin 5x}{5x}\right) \times 5 - \left(\dfrac{\sin 10x}{10x}\right) \times 5\right] \times \dfrac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{2\cos 5x}$

$\lim\limits_{x\to 0} \underbrace{[5-5]}_{=0} \left[\dfrac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{2\cos 5x}\right]$

0 //

④ ආදේශය මගින් ගැටලු

* ප්‍රතිලෝම ශ්‍රිත අඩංගු සීමා ගැටලුවල දී ගොනු කිරීම ආදේශනය භාවිතා කළ හැක.

ආදේශ:

$\boxed{\text{ප්‍රතිලෝම ශ්‍රිතය} = t}$

① $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sin^{-1}(x-3)}{x^2-3x}$

$\lim\limits_{x\to 3}$. $\sin^{-1}(x-3) = t$

$\sin t + 3 \to 3$ $\quad x - 3 = \sin t$

$\sin t \to 0$ $\quad x = (\sin t + 3)$

$t \to 0$

$\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{t}{x(x-3)}$

$\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{t}{(\sin t+3)(\sin t)}$

$\cancel{\dfrac{t}{\sin^2 t + 3\sin t}}$

$\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{1}{(\sin t+3)\left(\dfrac{\sin t}{t}\right)}$

$\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{1}{(\sin t+3)}$

$\dfrac{1}{0+3}$

$\dfrac{1}{3}$ //

② $\lim_{x \to \frac{1}{2}} \dfrac{4x^2-1}{\sin^{-1}(2x-1)}$

$\sin^{-1}(2x-1) = t$

$(2x-1) = \sin t$

$x = \left(\dfrac{\sin t+1}{2}\right)$

$\lim_{x \to \frac{1}{2}}$

$\dfrac{\sin t+1}{2} \to \frac{1}{2}$

$\sin t + 1 \to 1$

$\sin t \to 0$

$\lim_{\sin t \to 0} \dfrac{(2x-1)(2x+1)}{t}$

$t \to 0$

$\lim_{t \to 0} \dfrac{\sin t}{t}(\sin t + 2)$

$\lim_{t \to 0} 1 \times (\sin t + 2)$

$1 \times (0+2)$

2

ഉദാഹരണം

① $\lim_{x \to \pi/2} \dfrac{1-\sin x}{4x^2-\pi^2}$

$\lim_{x \to \pi/2} \dfrac{1-\sin x}{(2x-\pi)(2x+\pi)}$

$\lim_{x \to \pi/2} \dfrac{1-\cos(\pi/2 - x)}{(2x-\pi)(2x+\pi)}$

$\lim_{x \to \pi/2} \dfrac{\cancel{1}-\cancel{1}+2\sin^2\left(\frac{\pi-2x}{4}\right)}{(2x-\pi)(2x+\pi)}$

$\lim_{x \to \pi/2} \dfrac{2\sin^2\left(\frac{2x-\pi}{4}\right)}{(2x-\pi)(2x+\pi)}$

$\lim_{x \to \pi/2} \dfrac{\cancel{2}\sin^2\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}{2^{4}\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)(2x+\pi)}$

$\frac{1}{2}\lim_{x \to \pi/2} \dfrac{\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}{\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)} \times \dfrac{\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}{(2x+\pi)}$

$\cancel{\lim_{x\to\pi/2}}$ $\frac{1}{2} \times 1 \times \dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)}{\left(2\times\frac{\pi}{2}+\pi\right)}$

$\frac{1}{2} \times 1 \times \frac{0}{2\pi} = \frac{0}{4\pi}$

0

② $\lim_{x \to \pi/2} \dfrac{1-\sin x}{(2x-\pi)^2}$

$\lim_{x \to \pi/2} \dfrac{1-\cos(\pi/2 - x)}{(2x-\pi)^2}$

$\lim_{x \to \pi/2} \dfrac{\cancel{1}-\cancel{1}+2\sin^2\left(\frac{\frac{\pi}{2}-x}{2}\right)}{(2x-\pi)^2}$

$\lim_{x \to \pi/2} \dfrac{\cancel{2}\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{2x}{4}\right)}{\cancel{2}^{4}\,8\left(\frac{2x}{4}-\frac{\pi}{4}\right)^2}$

$\lim_{x \to \pi/2} \dfrac{1}{8} \dfrac{\sin^2\left(\frac{2x}{4}-\frac{\pi}{4}\right)}{\left(\frac{2x}{4}-\frac{\pi}{4}\right)^2}$

$\frac{1}{8} \times 1 \quad \frac{1}{8}$

③ $\lim_{x \to 0} \dfrac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4}$

$\lim_{x \to 0} \dfrac{1-\cos(\cancel{1}-\cancel{1}+2\sin^2 x/2)}{x^4}$

$\lim_{x \to 0} \dfrac{\cancel{1}-\cancel{1}+2\sin^2\left(\frac{\cancel{2}\sin^2 x/2}{\cancel{2}}\right)}{x^4}$

$\lim_{x \to 0} \dfrac{2\sin^2(\sin^2 x/2)}{x^4}$

$\lim_{x \to 0} 2 \times \left[\dfrac{\sin(\sin^2 x/2)}{x^2}\right]^2$

$\lim_{x \to 0} 2\left[\dfrac{\sin(\sin^2 x/2)}{\sin^2 x/2} \times \dfrac{\sin^2 x/2}{x^2}\right]^2$

$\lim_{x \to 0} 2\left[1 \times \dfrac{\sin^2 x/2}{x^2}\right]^2$

$\lim_{x \to 0} 2\left[1 \times \dfrac{\sin^2 x/2}{x^2/4}\right]^2$

$\lim_{x \to 0} 2\left[\frac{1}{4}\left(\dfrac{\sin x/2}{x/2}\right)^2\right]^2$

$\lim_{x \to 0} 2 \times \frac{1}{16}$

$\frac{1}{8}$

② $\lim_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x-2}-1}{\sin[\pi(x-3)]}$

$$\lim_{x\to 3} \frac{(\sqrt{x-2}-1)(\sqrt{x-2}+1)}{\sin[\pi(x-3)](\sqrt{x-2}+1)}$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{x-2-1}{\sin[\pi(x-3)][\sqrt{x-2}+1]}$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi(x-3)}{\sin(\pi(x-3))}\right) \times \frac{1}{(\sqrt{x-2}+1)}$$

$$\frac{1}{\pi} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2\pi}$$

[illegible] theorem එකද පරිමේය ප්‍රකාශනවල සීමා සෙවීමේ ප්‍රමේයය භාවිතාකරමින්ද සාධනය වේ.

<u>පරිමේය ප්‍රකාශනවල සීමා සෙවීමේ ප්‍රමේයයේ විශේෂ අවස්ථා</u>

a - නියතයක් හා n - පරිමේය සංඛ්‍යාවක්

$$\boxed{\lim_{x\to a} \frac{x^n - a^n}{x-a} = n\cdot a^{(n-1)}}$$

$$\boxed{\lim_{x\to} \frac{\square^n - \Delta^n}{\square - \Delta} = n\cdot\Delta^{n-1}}$$

① $\lim_{x\to \pi/4} \dfrac{\tan^7 x - 1}{\tan x - 1}$

$\tan x \to \tan \pi/4$ $\quad \dfrac{\tan^7 x - 1^7}{\tan x - 1}$

$\tan x \to 1$

$$7\cdot 1^6$$

$$7$$

② $\lim_{x\to 0} \dfrac{(2x+1)^{1/5} - 1}{x}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{2((2x+1)^{1/5} - 1)}{(2x+1) - 1}$$

$$\lim_{x\to 0} 2\,\frac{(2x+1)^{1/5} - 1^{1/5}}{(2x+1) - 1}$$

$$2 \times \left[\frac{1}{5} \times (1)^{\frac{1}{5}-1}\right]$$

$$\frac{2}{5}$$

③ $\lim_{x\to 0} \dfrac{(x+2)^5 - 32}{\sin 3x}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sin 3x} \times \left[\frac{(x+2)^5 - 2^5}{(x+2) - 2}\right] \times x$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin 3x}\left[5\cdot 2^{(5-1)}\right]$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{3}\times\left(\frac{3x}{\sin 3x}\right)\times 5\times 2^4$$

$$\frac{1}{3}\times 5\times 16$$

$$\frac{80}{3}$$

④ $\lim_{x\to 1} \dfrac{1-\sqrt{x}}{(\cos^{-1}x)^2}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1-\sqrt{x})}{(\cos^{-1}x)^2} \times \frac{(1+\sqrt{x})}{(1+\sqrt{x})}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1-x)}{(\cos^{-1}x)^2} \times \frac{1}{(1+\sqrt{x})}$$

$x \to 1$ $\quad \cos^{-1}x = t$

$\cos t \to 1$ $\quad x = \cos t$

$t \to 0$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1-x)}{(\cos^{-1}x)^2} \times \frac{1}{(1+\sqrt{x})}$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{1-\cos t}{t^2} \times \frac{1}{1+\sqrt{\cos t}}$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{2}{4}\left(\frac{\sin^2 \frac{t}{2}}{\frac{t^2}{4}}\right) \times \frac{1}{1+\sqrt{\cos t}}$$

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{(1+1)}$$

$$\frac{1}{4}$$

⑤ $\lim_{x\to \pi/2} \dfrac{2x\sin x}{\sec x - 1}$

$$\lim_{x\to \pi/2} \frac{2x\sin x\cos x}{1-\cos x}$$

$$\lim_{x\to \pi/2} \frac{\cancel{2x\sin x\cos x}}{\cancel{1-1}+2\sin^2 x/2}$$

$$\lim_{x\to \pi/2} \frac{1}{4}\,\frac{\sin x\cos x}{\left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2}$$

$$\lim_{x\to \pi/2} \frac{4}{\pi}\times\frac{1}{1}\times\cos x$$

$$\frac{4}{1}\cos x = 0\times 4 = 0$$

⑥ $\lim_{x \to \pi} \frac{\sin x}{(\pi - x)}$

$\lim_{x \to \pi} \frac{\sin(\pi - x)}{(\pi - x)}$

1

---

(03) ත්‍රිකෝණමිතික ශ්‍රිත වල සීමා

(04) ලඝුගණක ශ්‍රිත වල සීමා

ශ්‍රිත වල අවශ්‍ය නෑ

$\boxed{a^x \text{ ආකාරයේ ශ්‍රිත වල සීමා}}$

Note:

a^x ශ්‍රිතයක් ඝාතීය ශ්‍රිතයකට හැරවීම

$a^x = e^t$ ලෙස ගනිමු.
දෙපැත්තටම ln යොදමු.

$\ln a^x = \ln e^t$

$x \ln a = t \underbrace{\ln e}_{=1}$

$x \ln a = t$

$\log_e a^x = t$

$e^t = a^x$

$a^x = e^{x \ln a}$

සිහිය: $a^x = e^t$ ලෙස ගෙන
දෙපැත්තටම ln යොදා
ගැලපුව ඝාතීය ශ්‍රිතයක් බවට
පත් කර සීමාව සොයාගනිමු

① $\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x}$

$a^x = e^t$ ලෙස ගනිමු

$\ln a^x = \ln e^t$

$x \ln a = t \underbrace{\ln e}_{=1}$

$e^t = a^x$

$a^x = e^{x \ln a}$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^{x \ln a} - 1}{x}$

$\lim_{x \to 0} \frac{\left[\cancel{1} + x \ln a + \frac{(x \ln a)^2}{2!} + \cdots\right] - \cancel{1}}{x}$

$\lim_{x \to 0} \ln a + \frac{x (\ln a)^2}{2!} + \cdots$

$\ln a + 0 + 0 \cdots$

$\ln a$

② $\lim_{x \to 0} \frac{2^x - 1}{x}$

$2^x = e^t$ ලෙස ගනිමු

$x \ln 2 = t \ln e$

$t = x \ln 2$

$e^t = 2^x$

$2^x = e^{x \ln 2}$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^{x \ln 2} - 1}{x}$

$\lim_{x \to 0} \frac{\left[\cancel{1} + x \ln 2 + \frac{(x \ln 2)^2}{2!} + \cdots\right] - \cancel{1}}{x}$

$\lim_{x \to 0} \ln 2 + \frac{x (\ln 2)^2}{2!} + \cdots$

$\ln 2 + 0 + 0 + \cdots$

$\ln 2$

අනන්ත සීමා

අනන්ත සීමා
- ① බහුපද ශ්‍රිතවල සීමා
- ② පරිමේය ශ්‍රිතවල සීමා.

① බහුපද ශ්‍රිතවල සීමා

විචල්‍යයේ විශාලතම බලය ඇති
අදාළ පදයට ආදේශ කරන්න.

① $\lim\limits_{x\to\infty} x^3+5x^2+7x+1$

x^3

$(\infty)^3$

∞ //

② $\lim\limits_{x\to-\infty} 7-2x-x^3$

$-x^3$

$-(-\infty)^3$

$-(-\infty)$

∞ //

③ $\lim\limits_{x\to\infty} 7-6x-x^5$

$-x^5$

$-(\infty)^5$

$-\infty$ //

② පරිමේය ශ්‍රිතවල සීමා

$\frac{1}{\infty}\to 0$

විචල්‍ය හරයෙන් හා ලවයෙන් විශාලතම
ඇතිනම බලයෙන් පොදුකරගෙන,
ඒවා ඉවත්කර විශාලතම
අගය ආදේශ කරන්න

① $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{5x+8}{x+3}$

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\cancel{x}\left[5+\frac{8}{x}\right]}{\cancel{x}\left[1+\frac{3}{x}\right]}$

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{5+\frac{8}{x}}{1+\frac{3}{x}}$

$\frac{5+\frac{8}{\infty}}{1+\frac{3}{\infty}} = \frac{5+0}{1+0} = 5$ //

② $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^3+7x+5}{x^2+3x+1}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^{\cancel{3}}\left[1+\frac{7}{x^2}+\frac{5}{x^3}\right]}{\cancel{x^2}\left[1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right]}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x\left[1+\frac{7}{x^2}+\frac{5}{x^3}\right]}{\left[1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right]}$

$\frac{-\infty\left[1+\frac{7}{\infty}-\frac{5}{\infty}\right]}{\left[1-\frac{3}{\infty}+\frac{1}{\infty}\right]}$

$\frac{-\infty\left[1+0-0\right]}{\left[1-0+0\right]}$

$-\infty$ //